Exercices : Échantillonnage et Estimation

À préparer pour l'examen

Exercice 1

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 15.0$ et d'écart-type $\sigma = 3.0$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

18.3	18.2	28.5	13.0	13.8
18.0	17.4	18.1	15.1	18.4

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 15.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 14.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.53) ≈0.7019, Φ(1.05) ≈0.8531, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 1

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (18.3 + 18.2 + 28.5 + 13.0 + 13.8 + 18.0 + 17.4 + 18.1 + 15.1 + 18.4)$$
   $$\overline{x} = \frac{178.80}{10} = \boxed{17.88}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 17.88. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(0.42, 0.32, 10.62, -4.88, -4.08, 0.12, -0.48, 0.22, -2.78, 0.52)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(0.18, 0.10, 112.78, 23.81, 16.65, 0.01, 0.23, 0.05, 7.73, 0.27)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0.18+0.10+112.78+23.81+16.65+0.01+0.23+0.05+7.73+0.27 = 161.82$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{161.82}{9} = \boxed{17.98}$$

Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur ***sans biais*** *de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{17.98} = \boxed{4.24}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 4.24 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 15.0)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 15.0$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 15.0 = 8$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{8}{10} = \boxed{0.80}$$

Interprétation : On estime que environ 80.0% de la population vérifie $X > 15.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{15.00}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
Données : $\sigma = 3.0$, $n = 10$.
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.0}{\sqrt{10}} = \frac{3.0}{3.16} = \boxed{0.95}$$
Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.95}{0.47} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 14.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(15.0,\ (0.95)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{14.5 - 15.0}{0.95} = -0.53$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 14.5) = \Phi(-0.53) = \boxed{0.2981}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(14.0 \leq \overline{X} \leq 16.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/0.95 = -1.05$$
$$z_{\text{sup}} = 1/0.95 = 1.05$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(1.05) - 1 = \boxed{0.7063}$$
Interprétation : 70.63% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.95 = \boxed{1.86}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.86 unités de μ.

Exercice 2

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 12.5$ et d'écart-type $\sigma = 2.5$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

14.3	8.6	11.4	12.6	12.3
10.6	8.3	10.8	13.1	11.7

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 12.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 12.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.63) ≈0.7357, Φ(1.27) ≈0.8980, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 2

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (14.3 + 8.6 + 11.4 + 12.6 + 12.3 + 10.6 + 8.3 + 10.8 + 13.1 + 11.7)$$

$$\overline{x} = \frac{113.70}{10} = \boxed{11.37}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 11.37. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(2.93, -2.77, 0.03, 1.23, 0.93, -0.77, -3.07, -0.57, 1.73, 0.33)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(8.58, 7.67, 0.00, 1.51, 0.86, 0.59, 9.42, 0.32, 2.99, 0.11)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 8.58 + 7.67 + 0.00 + 1.51 + 0.86 + 0.59 + 9.42 + 0.32 + 2.99 + 0.11 = 32.08$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{32.08}{9} = \boxed{3.56}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2*.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{3.56} = \boxed{1.89}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 1.89 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 12.5)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 12.5$*.*
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 12.5 = 3$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{3}{10} = \boxed{0.30}$$

   Interprétation : On estime que environ 30.0% de la population vérifie $X > 12.5$*.*

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ*.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{12.50}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n*, la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ*.*

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.5$*,* $n = 10$*.*

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.5}{\sqrt{10}} = \frac{2.5}{3.16} = \boxed{0.79}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.79}{0.40} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 12.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(12.5,\ (0.79)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{12.0 - 12.5}{0.79} = -0.63$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 12.0) = \Phi(-0.63) = \boxed{0.2643}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(11.5 \leq \overline{X} \leq 13.5)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/0.79 = -1.27$$
$$z_{\text{sup}} = 1/0.79 = 1.27$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(1.27) - 1 = \boxed{0.7959}$$
Interprétation : 79.59% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$ *:*
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.79 = \boxed{1.55}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.55 unités de μ.

Exercice 3

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 18.0$ et d'écart-type $\sigma = 4.0$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

19.5	22.2	14.4	14.6	18.6
21.9	15.3	24.3	18.9	19.1

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 18.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 17.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.40) ≈0.6554, Φ(0.79) ≈0.7852, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 3

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (19.5 + 22.2 + 14.4 + 14.6 + 18.6 + 21.9 + 15.3 + 24.3 + 18.9 + 19.1)$$

$$\overline{x} = \frac{188.80}{10} = \boxed{18.88}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 18.88. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(0.62, 3.32, -4.48, -4.28, -0.28, 3.02, -3.58, 5.42, 0.02, 0.22)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(0.38, 11.02, 20.07, 18.32, 0.08, 9.12, 12.82, 29.38, 0.00, 0.05)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 0.38+11.02+20.07+18.32+0.08+9.12+12.82+29.38+0.00+0.05 = 101.24$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{101.24}{9} = \boxed{11.25}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{11.25} = \boxed{3.35}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 3.35 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 18.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 18.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 18.0 = 7$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{7}{10} = \boxed{0.70}$$

   Interprétation : On estime que environ 70.0% de la population vérifie $X > 18.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   *Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{18.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 4.0$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{4.0}{\sqrt{10}} = \frac{4.0}{3.16} = \boxed{1.26}$$

   *Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.26}{0.63} \approx 2 \quad \checkmark$$
8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 17.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(18.0,\ (1.26)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{17.5 - 18.0}{1.26} = -0.40$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 17.5) = \Phi(-0.40) = \boxed{0.3446}$$
9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(17.0 \leq \overline{X} \leq 19.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.26 = -0.79$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.26 = 0.79$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.79) - 1 = \boxed{0.5705}$$
Interprétation : 57.05% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.
10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.26 = \boxed{2.48}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.48 unités de μ.

Exercice 4

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 14.0$ et d'écart-type $\sigma = 3.5$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

7.9	12.5	13.7	22.2	16.9
7.5	11.0	14.5	10.2	9.5

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 14.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 13.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.45) ≈0.6736, Φ(0.90) ≈0.8159, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 4

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (7.9 + 12.5 + 13.7 + 22.2 + 16.9 + 7.5 + 11.0 + 14.5 + 10.2 + 9.5)$$

$$\overline{x} = \frac{125.90}{10} = \boxed{12.59}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 12.59. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-4.69, -0.09, 1.11, 9.61, 4.31, -5.09, -1.59, 1.91, -2.39, -3.09)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(22.00, 0.01, 1.23, 92.35, 18.58, 25.91, 2.53, 3.65, 5.71, 9.55)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 22.00+0.01+1.23+92.35+18.58+25.91+2.53+3.65+5.71+9.55 = 181.51$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{181.51}{9} = \boxed{20.17}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{20.17} = \boxed{4.49}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 4.49 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 14.0)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 14.0$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 14.0 = 3$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{3}{10} = \boxed{0.30}$$

Interprétation : On estime que environ 30.0% de la population vérifie $X > 14.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
*Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{14.00}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 3.5$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.5}{\sqrt{10}} = \frac{3.5}{3.16} = \boxed{1.11}$$

*Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.11}{0.55} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 13.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(14.0,\ (1.11)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{13.5 - 14.0}{1.11} = -0.45$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 13.5) = \Phi(-0.45) = \boxed{0.3264}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(13.0 \leq \overline{X} \leq 15.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.11 = -0.90$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.11 = 0.90$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.90) - 1 = \boxed{0.6319}$$
Interprétation : 63.19% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$ *:*
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.11 = \boxed{2.17}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.17 unités de μ.

Exercice 5

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 16.5$ et d'écart-type $\sigma = 2.8$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

20.8	17.9	17.7	14.0	14.6
18.1	17.2	15.3	13.8	19.0

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 16.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 16.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : $\Phi(0.56) \approx 0.7123$, $\Phi(1.12) \approx 0.8686$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Solution 5

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (20.8 + 17.9 + 17.7 + 14.0 + 14.6 + 18.1 + 17.2 + 15.3 + 13.8 + 19.0)$$
   $$\overline{x} = \frac{168.40}{10} = \boxed{16.84}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 16.84. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(3.96, 1.06, 0.86, -2.84, -2.24, 1.26, 0.36, -1.54, -3.04, 2.16)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(15.68, 1.12, 0.74, 8.07, 5.02, 1.59, 0.13, 2.37, 9.24, 4.67)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 15.68 + 1.12 + 0.74 + 8.07 + 5.02 + 1.59 + 0.13 + 2.37 + 9.24 + 4.67 = 48.62$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{48.62}{9} = \boxed{5.40}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2.

3. **Écart-type d'échantillon** s **:**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{5.40} = \boxed{2.32}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 2.32 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de** $p = P(X > 16.5)$ **:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 16.5$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 16.5 = 6$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{6}{10} = \boxed{0.60}$$

   Interprétation : On estime que environ 60.0% de la population vérifie $X > 16.5$.

5. **Espérance de** $\overline{x}$ **:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ.

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{16.50}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de** $\overline{x}$ **:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.8$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.8}{\sqrt{10}} = \frac{2.8}{3.16} = \boxed{0.89}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ. *Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.89}{0.44} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 16.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(16.5,\ (0.89)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{16.0 - 16.5}{0.89} = -0.56$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 16.0) = \Phi(-0.56) = \boxed{0.2877}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(15.5 \leq \overline{X} \leq 17.5)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/0.89 = -1.12$$
$$z_{\text{sup}} = 1/0.89 = 1.12$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(1.12) - 1 = \boxed{0.7373}$$
Interprétation : 73.73% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.89 = \boxed{1.74}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.74 unités de μ.

Exercice 6

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 13.0$ et d'écart-type $\sigma = 3.2$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

10.9	10.2	13.6	15.1	10.6
15.0	15.7	11.1	11.7	9.9

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 13.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 12.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.50) ≈0.6915, Φ(0.99) ≈0.8389, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 6

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (10.9 + 10.2 + 13.6 + 15.1 + 10.6 + 15.0 + 15.7 + 11.1 + 11.7 + 9.9)$$

$$\overline{x} = \frac{123.80}{10} = \boxed{12.38}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 12.38. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-1.48, -2.18, 1.22, 2.72, -1.78, 2.62, 3.32, -1.28, -0.68, -2.48)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(2.19, 4.75, 1.49, 7.40, 3.17, 6.86, 11.02, 1.64, 0.46, 6.15)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 2.19 + 4.75 + 1.49 + 7.40 + 3.17 + 6.86 + 11.02 + 1.64 + 0.46 + 6.15 = 45.14$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{45.14}{9} = \boxed{5.02}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2*.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{5.02} = \boxed{2.24}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 2.24 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 13.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 13.0$*.*
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 13.0 = 4$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{4}{10} = \boxed{0.40}$$

   Interprétation : On estime que environ 40.0% de la population vérifie $X > 13.0$*.*

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ*.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{13.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ*.*

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 3.2$*,* $n = 10$*.*

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.2}{\sqrt{10}} = \frac{3.2}{3.16} = \boxed{1.01}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.01}{0.51} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 12.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(13.0,\ (1.01)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{12.5 - 13.0}{1.01} = -0.50$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 12.5) = \Phi(-0.50) = \boxed{0.3085}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(12.0 \leq \overline{X} \leq 14.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.01 = -0.99$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.01 = 0.99$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.99) - 1 = \boxed{0.6778}$$
Interprétation : 67.78% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.01 = \boxed{1.98}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.98 unités de μ.

Exercice 7

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 17.5$ et d'écart-type $\sigma = 4.2$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

27.5	12.1	12.2	11.5	11.8
21.1	18.3	15.2	13.5	18.5

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 17.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 17.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.38) ≈0.6480, Φ(0.75) ≈0.7734, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 7

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (27.5 + 12.1 + 12.2 + 11.5 + 11.8 + 21.1 + 18.3 + 15.2 + 13.5 + 18.5)$$
   $$\overline{x} = \frac{161.70}{10} = \boxed{16.17}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 16.17. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(11.33, -4.07, -3.97, -4.67, -4.37, 4.93, 2.13, -0.97, -2.67, 2.33)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(128.37, 16.56, 15.76, 21.81, 19.10, 24.30, 4.54, 0.94, 7.13, 5.43)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 128.37+16.56+15.76+21.81+19.10+24.30+4.54+0.94+7.13+5.43 = 243.94$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{243.94}{9} = \boxed{27.10}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{27.10} = \boxed{5.21}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 5.21 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 17.5)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 17.5$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 17.5 = 4$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{4}{10} = \boxed{0.40}$$

Interprétation : On estime que environ 40.0% de la population vérifie $X > 17.5$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
*Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{17.50}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 4.2$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{4.2}{\sqrt{10}} = \frac{4.2}{3.16} = \boxed{1.33}$$

*Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.33}{0.66} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 17.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(17.5,\ (1.33)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{17.0 - 17.5}{1.33} = -0.38$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 17.0) = \Phi(-0.38) = \boxed{0.3520}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(16.5 \leq \overline{X} \leq 18.5)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.33 = -0.75$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.33 = 0.75$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.75) - 1 = \boxed{0.5467}$$
Interprétation : 54.67% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.33 = \boxed{2.60}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.60 unités de μ.

Exercice 8

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 15.5$ et d'écart-type $\sigma = 3.8$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

22.8	11.0	14.4	21.1	15.3
15.0	12.6	13.3	17.4	12.2

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 15.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 15.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.42) ≈0.6628, Φ(0.83) ≈0.7967, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 8

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
Application numérique avec $n = 10$:
$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (22.8 + 11.0 + 14.4 + 21.1 + 15.3 + 15.0 + 12.6 + 13.3 + 17.4 + 12.2)$$
$$\overline{x} = \frac{155.10}{10} = \boxed{15.51}$$
Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 15.51. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
$$(7.29, -4.51, -1.11, 5.59, -0.21, -0.51, -2.91, -2.21, 1.89, -3.31)$$
Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
$$(53.14, 20.34, 1.23, 31.25, 0.04, 0.26, 8.47, 4.88, 3.57, 10.96)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 53.14+20.34+1.23+31.25+0.04+0.26+8.47+4.88+3.57+10.96 = 134.15$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{134.15}{9} = \boxed{14.91}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{14.91} = \boxed{3.86}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 3.86 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 15.5)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 15.5$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 15.5 = 3$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{3}{10} = \boxed{0.30}$$

   Interprétation : On estime que environ 30.0% de la population vérifie $X > 15.5$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   *Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{15.50}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 3.8$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.8}{\sqrt{10}} = \frac{3.8}{3.16} = \boxed{1.20}$$

   *Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :

— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.20}{0.60} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 15.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(15.5,\ (1.20)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{15.0 - 15.5}{1.20} = -0.42$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 15.0) = \Phi(-0.42) = \boxed{0.3372}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(14.5 \leq \overline{X} \leq 16.5)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/1.20 = -0.83$$

$$z_{\text{sup}} = 1/1.20 = 0.83$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(0.83) - 1 = \boxed{0.5935}$$

Interprétation : 59.35% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.20 = \boxed{2.36}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.36 unités de μ.

Exercice 9

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 11.0$ et d'écart-type $\sigma = 2.2$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

12.4	13.5	13.2	12.2	10.3
11.7	12.0	10.5	12.5	8.0

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 11.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 10.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.71) ≈0.7611, Φ(1.43) ≈0.9236, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 9

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (12.4 + 13.5 + 13.2 + 12.2 + 10.3 + 11.7 + 12.0 + 10.5 + 12.5 + 8.0)$$
$$\overline{x} = \frac{116.30}{10} = \boxed{11.63}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 11.63. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
$$(0.77, 1.87, 1.57, 0.57, -1.33, 0.07, 0.37, -1.13, 0.87, -3.63)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
$$(0.59, 3.50, 2.46, 0.32, 1.77, 0.00, 0.14, 1.28, 0.76, 13.18)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0.59 + 3.50 + 2.46 + 0.32 + 1.77 + 0.00 + 0.14 + 1.28 + 0.76 + 13.18 = 24.00$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{24.00}{9} = \boxed{2.67}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2.

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{2.67} = \boxed{1.63}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 1.63 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 11.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 11.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 11.0 = 7$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{7}{10} = \boxed{0.70}$$

   Interprétation : On estime que environ 70.0% de la population vérifie $X > 11.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ.

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{11.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n*, la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.2$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.2}{\sqrt{10}} = \frac{2.2}{3.16} = \boxed{0.70}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.70}{0.35} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 10.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(11.0,\ (0.70)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{10.5 - 11.0}{0.70} = -0.71$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 10.5) = \Phi(-0.71) = \boxed{0.2389}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(10.0 \leq \overline{X} \leq 12.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/0.70 = -1.43$$
$$z_{\text{sup}} = 1/0.70 = 1.43$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(1.43) - 1 = \boxed{0.8473}$$
Interprétation : 84.73% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.70 = \boxed{1.36}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.36 unités de μ.

Exercice 10

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 19.0$ et d'écart-type $\sigma = 4.5$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

14.4	17.4	22.1	12.5	26.7
16.8	22.9	13.9	27.7	19.5

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 19.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 18.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.35) ≈0.6368, Φ(0.70) ≈0.7580, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 10

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (14.4 + 17.4 + 22.1 + 12.5 + 26.7 + 16.8 + 22.9 + 13.9 + 27.7 + 19.5)$$

$$\overline{x} = \frac{193.90}{10} = \boxed{19.39}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 19.39. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-4.99, -1.99, 2.71, -6.89, 7.31, -2.59, 3.51, -5.49, 8.31, 0.11)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(24.90, 3.96, 7.34, 47.47, 53.44, 6.71, 12.32, 30.14, 69.06, 0.01)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 24.90 + 3.96 + 7.34 + 47.47 + 53.44 + 6.71 + 12.32 + 30.14 + 69.06 + 0.01 = 255.35$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{255.35}{9} = \boxed{28.37}$$

Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur ***sans biais*** *de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{28.37} = \boxed{5.33}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 5.33 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 19.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 19.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 19.0 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

   Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 19.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{19.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 4.5$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{4.5}{\sqrt{10}} = \frac{4.5}{3.16} = \boxed{1.42}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.42}{0.71} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 18.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(19.0,\ (1.42)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{18.5 - 19.0}{1.42} = -0.35$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 18.5) = \Phi(-0.35) = \boxed{0.3632}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(18.0 \leq \overline{X} \leq 20.0)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/1.42 = -0.70$$

$$z_{\text{sup}} = 1/1.42 = 0.70$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(0.70) - 1 = \boxed{0.5161}$$

Interprétation : 51.61% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.42 = \boxed{2.79}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.79 unités de μ.

Exercice 11

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 14.5$ et d'écart-type $\sigma = 3.1$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

15.4	18.5	17.9	14.4	15.4
16.2	15.1	20.1	9.3	9.3

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 14.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 14.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : $\Phi(0.51) \approx 0.6950$, $\Phi(1.02) \approx 0.8461$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Solution 11

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (15.4 + 18.5 + 17.9 + 14.4 + 15.4 + 16.2 + 15.1 + 20.1 + 9.3 + 9.3)$$
   $$\overline{x} = \frac{151.60}{10} = \boxed{15.16}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 15.16. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(0.24, 3.34, 2.74, -0.76, 0.24, 1.04, -0.06, 4.94, -5.86, -5.86)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(0.06, 11.16, 7.51, 0.58, 0.06, 1.08, 0.00, 24.40, 34.34, 34.34)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 0.06+11.16+7.51+0.58+0.06+1.08+0.00+24.40+34.34+34.34 = 113.52$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{113.52}{9} = \boxed{12.61}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2*.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{12.61} = \boxed{3.55}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 3.55 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 14.5)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 14.5$*.*
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 14.5 = 7$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{7}{10} = \boxed{0.70}$$

Interprétation : On estime que environ 70.0% de la population vérifie $X > 14.5$*.*

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ*.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{14.50}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ*.*

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 3.1$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.1}{\sqrt{10}} = \frac{3.1}{3.16} = \boxed{0.98}$$

Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.98}{0.49} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 14.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(14.5,\ (0.98)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{14.0 - 14.5}{0.98} = -0.51$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 14.0) = \Phi(-0.51) = \boxed{0.3050}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(13.5 \leq \overline{X} \leq 15.5)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/0.98 = -1.02$$

$$z_{\text{sup}} = 1/0.98 = 1.02$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(1.02) - 1 = \boxed{0.6923}$$

Interprétation : 69.23% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.98 = \boxed{1.92}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.92 unités de μ.

Exercice 12

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 16.0$ et d'écart-type $\sigma = 2.9$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

10.9	13.5	19.6	14.4	18.3
14.0	13.3	15.1	13.8	17.4

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 16.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 15.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.54) ≈0.7054, Φ(1.09) ≈0.8621, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 12

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (10.9 + 13.5 + 19.6 + 14.4 + 18.3 + 14.0 + 13.3 + 15.1 + 13.8 + 17.4)$$
   $$\overline{x} = \frac{150.30}{10} = \boxed{15.03}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 15.03. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(-4.13, -1.53, 4.57, -0.63, 3.27, -1.03, -1.73, 0.07, -1.23, 2.37)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(17.06, 2.34, 20.88, 0.40, 10.69, 1.06, 2.99, 0.00, 1.51, 5.62)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 17.06 + 2.34 + 20.88 + 0.40 + 10.69 + 1.06 + 2.99 + 0.00 + 1.51 + 5.62 = 62.56$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{62.56}{9} = \boxed{6.95}$$

Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur ***sans biais*** *de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{6.95} = \boxed{2.64}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 2.64 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 16.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 16.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 16.0 = 3$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{3}{10} = \boxed{0.30}$$

   Interprétation : On estime que environ 30.0% de la population vérifie $X > 16.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{16.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.9$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.9}{\sqrt{10}} = \frac{2.9}{3.16} = \boxed{0.92}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.92}{0.46} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 15.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(16.0,\ (0.92)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{15.5 - 16.0}{0.92} = -0.54$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 15.5) = \Phi(-0.54) = \boxed{0.2946}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(15.0 \leq \overline{X} \leq 17.0)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/0.92 = -1.09$$

$$z_{\text{sup}} = 1/0.92 = 1.09$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(1.09) - 1 = \boxed{0.7243}$$

Interprétation : 72.43% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.92 = \boxed{1.80}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.80 unités de μ.

Exercice 13

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 13.5$ et d'écart-type $\sigma = 3.6$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

10.9	16.4	9.5	18.0	10.4
11.2	14.2	14.4	13.1	14.0

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 13.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 13.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.44) ≈0.6700, Φ(0.88) ≈0.8106, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 13

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
Application numérique avec $n = 10$:
$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (10.9 + 16.4 + 9.5 + 18.0 + 10.4 + 11.2 + 14.2 + 14.4 + 13.1 + 14.0)$$
$$\overline{x} = \frac{132.10}{10} = \boxed{13.21}$$
Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 13.21. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
$$(-2.31, 3.19, -3.71, 4.79, -2.81, -2.01, 0.99, 1.19, -0.11, 0.79)$$
Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
$$(5.34, 10.18, 13.76, 22.94, 7.90, 4.04, 0.98, 1.42, 0.01, 0.62)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 5.34 + 10.18 + 13.76 + 22.94 + 7.90 + 4.04 + 0.98 + 1.42 + 0.01 + 0.62 = 67.19$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{67.19}{9} = \boxed{7.47}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{7.47} = \boxed{2.73}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 2.73 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 13.5)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 13.5$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 13.5 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 13.5$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
*Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{13.50}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 3.6$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.6}{\sqrt{10}} = \frac{3.6}{3.16} = \boxed{1.14}$$

*Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.14}{0.57} \approx 2 \quad \checkmark$$
8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 13.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(13.5,\ (1.14)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{13.0 - 13.5}{1.14} = -0.44$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 13.0) = \Phi(-0.44) = \boxed{0.3300}$$
9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(12.5 \leq \overline{X} \leq 14.5)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.14 = -0.88$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.14 = 0.88$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.88) - 1 = \boxed{0.6211}$$
Interprétation : 62.11% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.
10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.14 = \boxed{2.23}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.23 unités de μ.

Exercice 14

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 17.0$ et d'écart-type $\sigma = 4.1$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

14.6	14.1	13.2	16.2	18.7
18.1	18.0	18.7	25.2	24.8

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 17.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 16.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : $\Phi(0.38) \approx 0.6480$, $\Phi(0.77) \approx 0.7794$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Solution 14

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (14.6 + 14.1 + 13.2 + 16.2 + 18.7 + 18.1 + 18.0 + 18.7 + 25.2 + 24.8)$$
   $$\overline{x} = \frac{181.60}{10} = \boxed{18.16}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 18.16. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(-3.56, -4.06, -4.96, -1.96, 0.54, -0.06, -0.16, 0.54, 7.04, 6.64)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(12.67, 16.48, 24.60, 3.84, 0.29, 0.00, 0.03, 0.29, 49.56, 44.09)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 12.67+16.48+24.60+3.84+0.29+0.00+0.03+0.29+49.56+44.09 = 151.86$$

Étape 4 : Division par $(n-1)=9$:

$$s^2 = \frac{151.86}{9} = \boxed{16.87}$$

Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur ***sans biais*** *de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{16.87} = \boxed{4.11}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 4.11 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 17.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 17.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 17.0 = 6$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{6}{10} = \boxed{0.60}$$

   Interprétation : On estime que environ 60.0% de la population vérifie $X > 17.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{17.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 4.1$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{4.1}{\sqrt{10}} = \frac{4.1}{3.16} = \boxed{1.30}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
   — Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
   — Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.30}{0.65} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 16.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(17.0,\ (1.30)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{16.5 - 17.0}{1.30} = -0.38$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 16.5) = \Phi(-0.38) = \boxed{0.3520}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(16.0 \leq \overline{X} \leq 18.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.30 = -0.77$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.30 = 0.77$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.77) - 1 = \boxed{0.5587}$$
Interprétation : 55.87% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.30 = \boxed{2.54}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.54 unités de μ.

Exercice 15

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 12.0$ et d'écart-type $\sigma = 2.6$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

10.0	10.6	6.1	15.1	12.8
12.8	11.3	16.6	7.6	12.8

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 12.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 11.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.61) ≈0.7291, Φ(1.22) ≈0.8888, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 15

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
   $$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (10.0 + 10.6 + 6.1 + 15.1 + 12.8 + 12.8 + 11.3 + 16.6 + 7.6 + 12.8)$$
   $$\overline{x} = \frac{115.70}{10} = \boxed{11.57}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 11.57. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
   $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
   $$(-1.57, -0.97, -5.47, 3.53, 1.23, 1.23, -0.27, 5.03, -3.97, 1.23)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
   $$(2.46, 0.94, 29.92, 12.46, 1.51, 1.51, 0.07, 25.30, 15.76, 1.51)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 2.46+0.94+29.92+12.46+1.51+1.51+0.07+25.30+15.76+1.51 = 91.46$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{91.46}{9} = \boxed{10.16}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2*.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{10.16} = \boxed{3.19}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 3.19 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 12.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 12.0$*.*
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 12.0 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

   Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 12.0$*.*

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ*.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{12.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n*, la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ*.*

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.6$*,* $n = 10$*.*

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.6}{\sqrt{10}} = \frac{2.6}{3.16} = \boxed{0.82}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.82}{0.41} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 11.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(12.0,\ (0.82)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{11.5 - 12.0}{0.82} = -0.61$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 11.5) = \Phi(-0.61) = \boxed{0.2709}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(11.0 \leq \overline{X} \leq 13.0)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/0.82 = -1.22$$

$$z_{\text{sup}} = 1/0.82 = 1.22$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(1.22) - 1 = \boxed{0.7775}$$

Interprétation : 77.75% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.82 = \boxed{1.61}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.61 unités de μ.

Exercice 16

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 18.5$ et d'écart-type $\sigma = 3.9$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

16.2	19.4	15.4	18.9	20.6
14.8	13.2	20.8	19.2	12.2

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 18.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 18.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.41) ≈0.6591, Φ(0.81) ≈0.7910, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 16

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   Application numérique avec $n = 10$:
$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (16.2 + 19.4 + 15.4 + 18.9 + 20.6 + 14.8 + 13.2 + 20.8 + 19.2 + 12.2)$$
$$\overline{x} = \frac{170.70}{10} = \boxed{17.07}$$
   Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 17.07. C'est notre estimation ponctuelle de μ.
2. **Variance d'échantillon s^2 :**
   Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
   Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
$$(-0.87, 2.33, -1.67, 1.83, 3.53, -2.27, -3.87, 3.73, 2.13, -4.87)$$
   Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
$$(0.76, 5.43, 2.79, 3.35, 12.46, 5.15, 14.98, 13.91, 4.54, 23.72)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0.76 + 5.43 + 2.79 + 3.35 + 12.46 + 5.15 + 14.98 + 13.91 + 4.54 + 23.72 = 87.08$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{87.08}{9} = \boxed{9.68}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2.

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{9.68} = \boxed{3.11}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 3.11 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 18.5)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 18.5$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 18.5 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

   Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 18.5$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ.

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{18.50}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, *la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 3.9$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.9}{\sqrt{10}} = \frac{3.9}{3.16} = \boxed{1.23}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ. *Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.23}{0.62} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 18.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(18.5,\ (1.23)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{18.0 - 18.5}{1.23} = -0.41$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 18.0) = \Phi(-0.41) = \boxed{0.3409}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(17.5 \leq \overline{X} \leq 19.5)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.23 = -0.81$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.23 = 0.81$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.81) - 1 = \boxed{0.5821}$$
Interprétation : 58.21% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.23 = \boxed{2.42}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.42 unités de μ.

Exercice 17

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 15.0$ et d'écart-type $\sigma = 3.3$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

13.3	15.8	21.2	19.4	14.1
12.1	10.3	15.9	14.3	16.1

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 15.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 14.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.48) ≈0.6844, Φ(0.96) ≈0.8315, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 17

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
Application numérique avec $n = 10$:
$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (13.3 + 15.8 + 21.2 + 19.4 + 14.1 + 12.1 + 10.3 + 15.9 + 14.3 + 16.1)$$
$$\overline{x} = \frac{152.50}{10} = \boxed{15.25}$$
Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 15.25. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:
$$(-1.95, 0.55, 5.95, 4.15, -1.15, -3.15, -4.95, 0.65, -0.95, 0.85)$$
Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:
$$(3.80, 0.30, 35.40, 17.22, 1.32, 9.92, 24.50, 0.42, 0.90, 0.72)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 3.80 + 0.30 + 35.40 + 17.22 + 1.32 + 9.92 + 24.50 + 0.42 + 0.90 + 0.72 = 94.52$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{94.52}{9} = \boxed{10.50}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{10.50} = \boxed{3.24}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 3.24 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 15.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 15.0$.
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 15.0 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

   Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 15.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   *Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{15.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 3.3$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.3}{\sqrt{10}} = \frac{3.3}{3.16} = \boxed{1.04}$$

   *Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.04}{0.52} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 14.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(15.0,\ (1.04)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{14.5 - 15.0}{1.04} = -0.48$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 14.5) = \Phi(-0.48) = \boxed{0.3156}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(14.0 \leq \overline{X} \leq 16.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.04 = -0.96$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.04 = 0.96$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.96) - 1 = \boxed{0.6629}$$
Interprétation : 66.29% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.04 = \boxed{2.05}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.05 unités de μ.

Exercice 18

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 14.0$ et d'écart-type $\sigma = 2.7$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

13.2	17.0	12.0	8.8	13.4
16.7	11.5	12.4	16.4	14.9

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 14.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 13.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.59) ≈0.7224, Φ(1.18) ≈0.8810, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 18

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (13.2 + 17.0 + 12.0 + 8.8 + 13.4 + 16.7 + 11.5 + 12.4 + 16.4 + 14.9)$$

$$\overline{x} = \frac{136.30}{10} = \boxed{13.63}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 13.63. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-0.43, 3.37, -1.63, -4.83, -0.23, 3.07, -2.13, -1.23, 2.77, 1.27)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(0.18, 11.36, 2.66, 23.33, 0.05, 9.42, 4.54, 1.51, 7.67, 1.61)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0.18 + 11.36 + 2.66 + 23.33 + 0.05 + 9.42 + 4.54 + 1.51 + 7.67 + 1.61 = 62.34$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{62.34}{9} = \boxed{6.93}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2*.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
   Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{6.93} = \boxed{2.63}$$

   Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 2.63 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 14.0)$:**
   Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 14.0$*.*
   Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 14.0 = 4$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{4}{10} = \boxed{0.40}$$

   Interprétation : On estime que environ 40.0% de la population vérifie $X > 14.0$*.*

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
   Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ*.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

   Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{14.00}$$

   Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n*, la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ*.*

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
   Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Données : $\sigma = 2.7$*,* $n = 10$*.*

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{2.7}{\sqrt{10}} = \frac{2.7}{3.16} = \boxed{0.85}$$

   Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{0.85}{0.43} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 13.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(14.0,\ (0.85)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{13.5 - 14.0}{0.85} = -0.59$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 13.5) = \Phi(-0.59) = \boxed{0.2776}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(13.0 \leq \overline{X} \leq 15.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/0.85 = -1.18$$
$$z_{\text{sup}} = 1/0.85 = 1.18$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(1.18) - 1 = \boxed{0.7620}$$
Interprétation : 76.20% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 0.85 = \boxed{1.67}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1.67 unités de μ.

Exercice 19

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 16.5$ et d'écart-type $\sigma = 4.3$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

8.9	14.9	18.1	11.6	14.5
18.4	13.9	23.3	15.5	20.2

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 16.5$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 16.0)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : Φ(0.37) ≈0.6443, Φ(0.74) ≈0.7704, Φ(1.96) = 0.975, Φ(-z) = 1 - Φ(z).

Solution 19

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (8.9 + 14.9 + 18.1 + 11.6 + 14.5 + 18.4 + 13.9 + 23.3 + 15.5 + 20.2)$$

$$\overline{x} = \frac{159.30}{10} = \boxed{15.93}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 15.93. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n-1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-7.03, -1.03, 2.17, -4.33, -1.43, 2.47, -2.03, 7.37, -0.43, 4.27)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(49.42, 1.06, 4.71, 18.75, 2.04, 6.10, 4.12, 54.32, 0.18, 18.23)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 49.42+1.06+4.71+18.75+2.04+6.10+4.12+54.32+0.18+18.23 = 158.94$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$:

$$s^2 = \frac{158.94}{9} = \boxed{17.66}$$

*Remarque : On utilise $n-1$ pour obtenir un estimateur **sans biais** de σ^2.*

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{17.66} = \boxed{4.20}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ est d'environ 4.20 unités.

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 16.5)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 16.5$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 16.5 = 4$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{4}{10} = \boxed{0.40}$$

Interprétation : On estime que environ 40.0% de la population vérifie $X > 16.5$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
*Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur **sans biais** de μ.*

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{16.50}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n, la moyenne d'échantillon vaut exactement μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 4.3$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{4.3}{\sqrt{10}} = \frac{4.3}{3.16} = \boxed{1.36}$$

*Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion **attendue** des moyennes d'échantillon autour de μ. Plus elle est petite, plus $\overline{x}$ est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$

Application numérique :

$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$

Commentaire :

— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).

Vérification :

$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.36}{0.68} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 16.0)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(16.5,\ (1.36)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*

$$z = \frac{16.0 - 16.5}{1.36} = -0.37$$

Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.

$$P(\overline{X} \leq 16.0) = \Phi(-0.37) = \boxed{0.3557}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(15.5 \leq \overline{X} \leq 17.5)$$

Étape 2 : Centrage et réduction.

$$z_{\text{inf}} = -1/1.36 = -0.74$$

$$z_{\text{sup}} = 1/1.36 = 0.74$$

Étape 3 : Calcul.

$$P = 2\Phi(0.74) - 1 = \boxed{0.5407}$$

Interprétation : 54.07% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$

Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:

$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.36 = \boxed{2.67}$$

Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.67 unités de μ.

Exercice 20

On considère une population de taille infinie dont la variable d'intérêt X suit une loi normale de moyenne $\mu = 13.0$ et d'écart-type $\sigma = 3.4$. L'échantillon suivant est prélevé dans cette population :

11.4	15.2	11.7	17.0	9.8
19.4	16.3	7.9	15.6	9.4

1. Calculer la moyenne d'échantillon $\overline{x}$.
2. Calculer la variance d'échantillon s^2.
3. Calculer l'écart-type d'échantillon s.
4. Estimer ponctuellement la proportion p de la population pour laquelle $X > 13.0$.
5. Calculer l'espérance de $\overline{x}$.
6. Calculer l'erreur-type de $\overline{x}$.
7. Quelle taille d'échantillon n' faudrait-il prélever pour diviser par 2 l'erreur-type de $\overline{x}$?
8. Calculer la probabilité $P(\overline{x} \leq 12.5)$.
9. Calculer la probabilité $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$.
10. Trouver d tel que $P(|\overline{x} - \mu| \leq d) = 0.95$.

Rappels : $\Phi(0.46) \approx 0.6772$, $\Phi(0.93) \approx 0.8238$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Solution 20

1. **Moyenne d'échantillon $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application numérique avec $n = 10$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10} \times (11.4 + 15.2 + 11.7 + 17.0 + 9.8 + 19.4 + 16.3 + 7.9 + 15.6 + 9.4)$$

$$\overline{x} = \frac{133.70}{10} = \boxed{13.37}$$

Interprétation : La moyenne observée dans l'échantillon est 13.37. C'est notre estimation ponctuelle de μ.

2. **Variance d'échantillon s^2 :**
Rappel de la formule (corrigée, avec $n - 1$) :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Étape 1 : Calcul des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})$:

$$(-1.97, 1.83, -1.67, 3.63, -3.57, 6.03, 2.93, -5.47, 2.23, -3.97)$$

Étape 2 : Calcul des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$(3.88, 3.35, 2.79, 13.18, 12.74, 36.36, 8.58, 29.92, 4.97, 15.76)$$

Étape 3 : Somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 3.88+3.35+2.79+13.18+12.74+36.36+8.58+29.92+4.97+15.76 = 131.54$$

Étape 4 : Division par $(n-1) = 9$ *:*

$$s^2 = \frac{131.54}{9} = \boxed{14.62}$$

Remarque : On utilise $n-1$ *pour obtenir un estimateur* ***sans biais*** *de* σ^2.

3. **Écart-type d'échantillon s :**
Rappel : L'écart-type est la racine carrée de la variance.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{14.62} = \boxed{3.82}$$

Interprétation : La dispersion moyenne des observations autour de $\overline{x}$ *est d'environ 3.82 unités.*

4. **Estimation ponctuelle de $p = P(X > 13.0)$:**
Principe : On compte le nombre d'observations dans l'échantillon strictement supérieures à $\mu = 13.0$.
Dans l'échantillon :

$$\text{Nombre d'observations } x_i > 13.0 = 5$$

$$\hat{p} = \frac{\text{nombre de succès}}{n} = \frac{5}{10} = \boxed{0.50}$$

Interprétation : On estime que environ 50.0% de la population vérifie $X > 13.0$.

5. **Espérance de $\overline{x}$:**
Propriété fondamentale : Pour un échantillon aléatoire simple, la moyenne d'échantillon est un estimateur ***sans biais*** *de* μ.

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$$

Application numérique :

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu = \boxed{13.00}$$

Interprétation : En moyenne, sur tous les échantillons possibles de taille n*, la moyenne d'échantillon vaut exactement* μ.

6. **Erreur-type de $\overline{x}$:**
Rappel de la formule :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Données : $\sigma = 3.4$, $n = 10$.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{3.4}{\sqrt{10}} = \frac{3.4}{3.16} = \boxed{1.08}$$

Interprétation : L'erreur-type mesure la dispersion ***attendue*** *des moyennes d'échantillon autour de* μ*. Plus elle est petite, plus* $\overline{x}$ *est précis.*

7. **Effet de la taille d'échantillon sur la précision :**
Objectif : Diviser l'erreur-type par 2.
Si $\sigma'_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\overline{x}}$, alors :
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n' = 4n$$
Application numérique :
$$n' = 4 \times 10 = \boxed{40}$$
Commentaire :
— Pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille d'échantillon.
— Les gains de précision sont décroissants (loi en $1/\sqrt{n}$).
Vérification :
$$\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma'_{\overline{x}}} = \frac{1.08}{0.54} \approx 2 \quad \checkmark$$

8. **Calcul de $P(\overline{x} \leq 12.5)$:**
Étape 1 : Distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$.
Comme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(13.0,\ (1.08)^2\right)$. *Étape 2 : Centrage et réduction.*
$$z = \frac{12.5 - 13.0}{1.08} = -0.46$$
Étape 3 : Lecture de $\Phi(z)$.
$$P(\overline{X} \leq 12.5) = \Phi(-0.46) = \boxed{0.3228}$$

9. **Calcul de $P(|\overline{x} - \mu| \leq 1)$:**
Étape 1 : Reformulation.
$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 1) = P(12.0 \leq \overline{X} \leq 14.0)$$
Étape 2 : Centrage et réduction.
$$z_{\text{inf}} = -1/1.08 = -0.93$$
$$z_{\text{sup}} = 1/1.08 = 0.93$$
Étape 3 : Calcul.
$$P = 2\Phi(0.93) - 1 = \boxed{0.6476}$$
Interprétation : 64.76% de chances que $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 1 unité de μ.

10. **Marge d'erreur avec 95% de confiance :**
Principe : On cherche d tel que $P(|\overline{X} - \mu| \leq d) = 0.95$.
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = 0.975$$
Comme $\Phi(1.96) = 0.975$:
$$\frac{d}{\sigma_{\overline{x}}} = 1.96 \Rightarrow d = 1.96 \times 1.08 = \boxed{2.11}$$
Interprétation : Avec 95% de confiance, $\overline{x}$ s'écarte d'au plus 2.11 unités de μ.